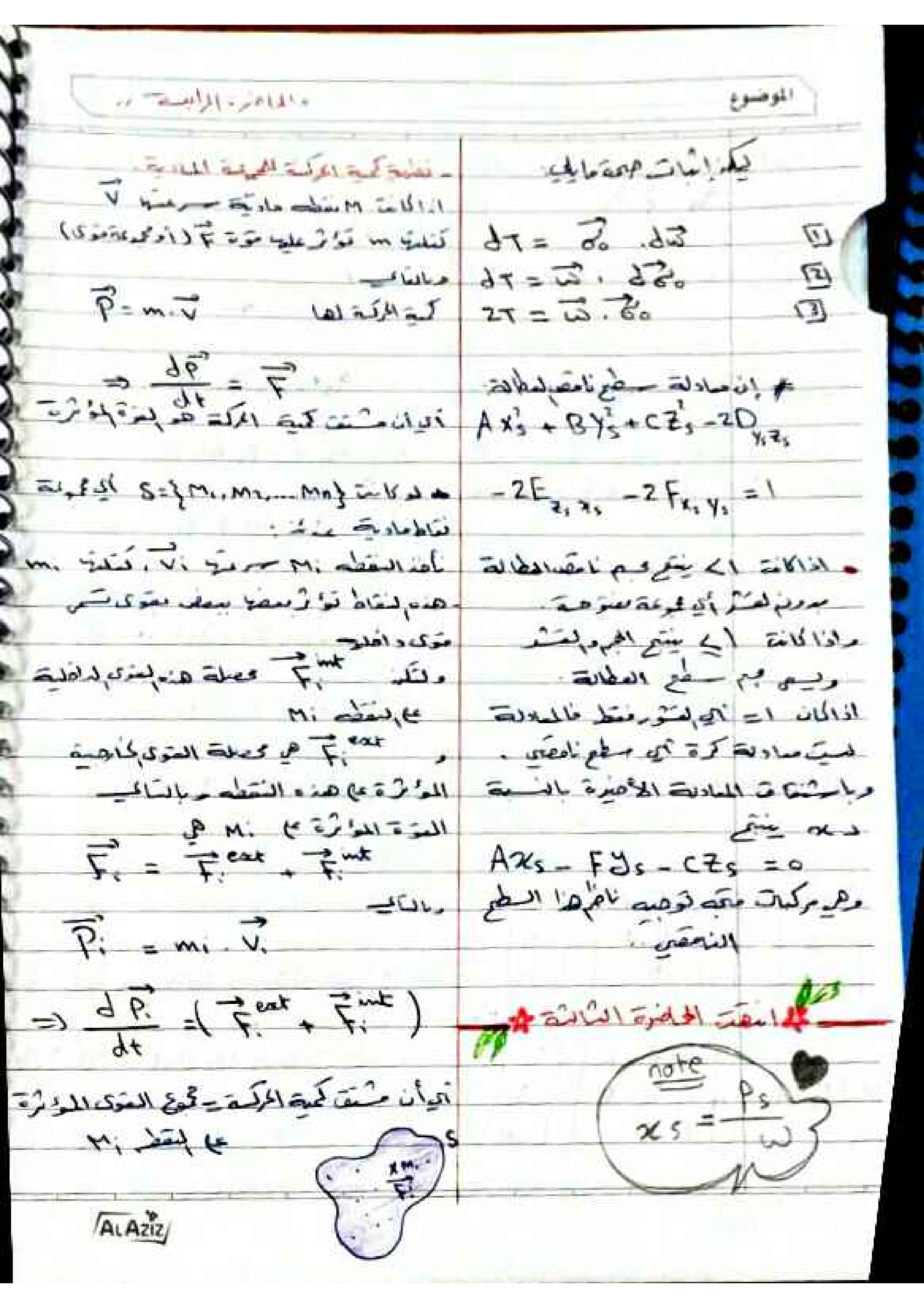


الموضوع

يمكن إثبات صحة ما يلي:

[1] $d\tau = \vec{\sigma}_0 \cdot d\vec{\omega}$

[2] $d\tau = \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma}_0$

[3] $2\tau = \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_0$

* إن معادلة سطح ناقص الطاقة:

$$A x_s^2 + B y_s^2 + C z_s^2 - 2D y_s z_s - 2E z_s x_s - 2F x_s y_s = 1$$

• اذا كانت 1 > ينتج جسم ناقص الطاقة بدون لمس أي مجموعة محورية.
وإذا كانت 1 < ينتج الجسم يلمس ويسمى جسم سطح الطاقة.
اذا كان 1 = أي لمس فقط فالمعادلة ليست معادلة كرة بل سطح ناقصي.
وباشتقاق المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ ... ينتج

$$A x_s - F y_s - C z_s = 0$$

وهي مركبات متجه توجيه ناظم هذا السطح الناقصي.

★ انتهت المحاضرة الثالثة ★

note
$x_s = \frac{p_s}{\omega}$

المحاضرة الرابعة

- نظرية كمية الحركة الخطية المادية

اذا كانت M نقطة مادية سرعتها $\vec{V}$ كتلتها m تؤثر عليها قوة $\vec{F}$ (أو مجموعة قوى) وبالتالي

كمية الحركة لها $\vec{P} = m \cdot \vec{V}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

أي أن مشتق كمية الحركة هو القوة المؤثرة

* لو كانت $S = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ أي مجموعة نقاط مادية عددها n:
نأخذ النقطة M_i سرعتها $\vec{V}_i$، كتلتها m_i
هذه النقاط تؤثر بعضها ببعض بقوى تسمى قوى داخلية
ولتكن $\vec{F}_i^{int}$ محصلة هذه القوى الداخلية على النقطة M_i
و $\vec{F}_i^{ext}$ هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على هذه النقطة وبالتالي القوة المؤثرة على M_i هي

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

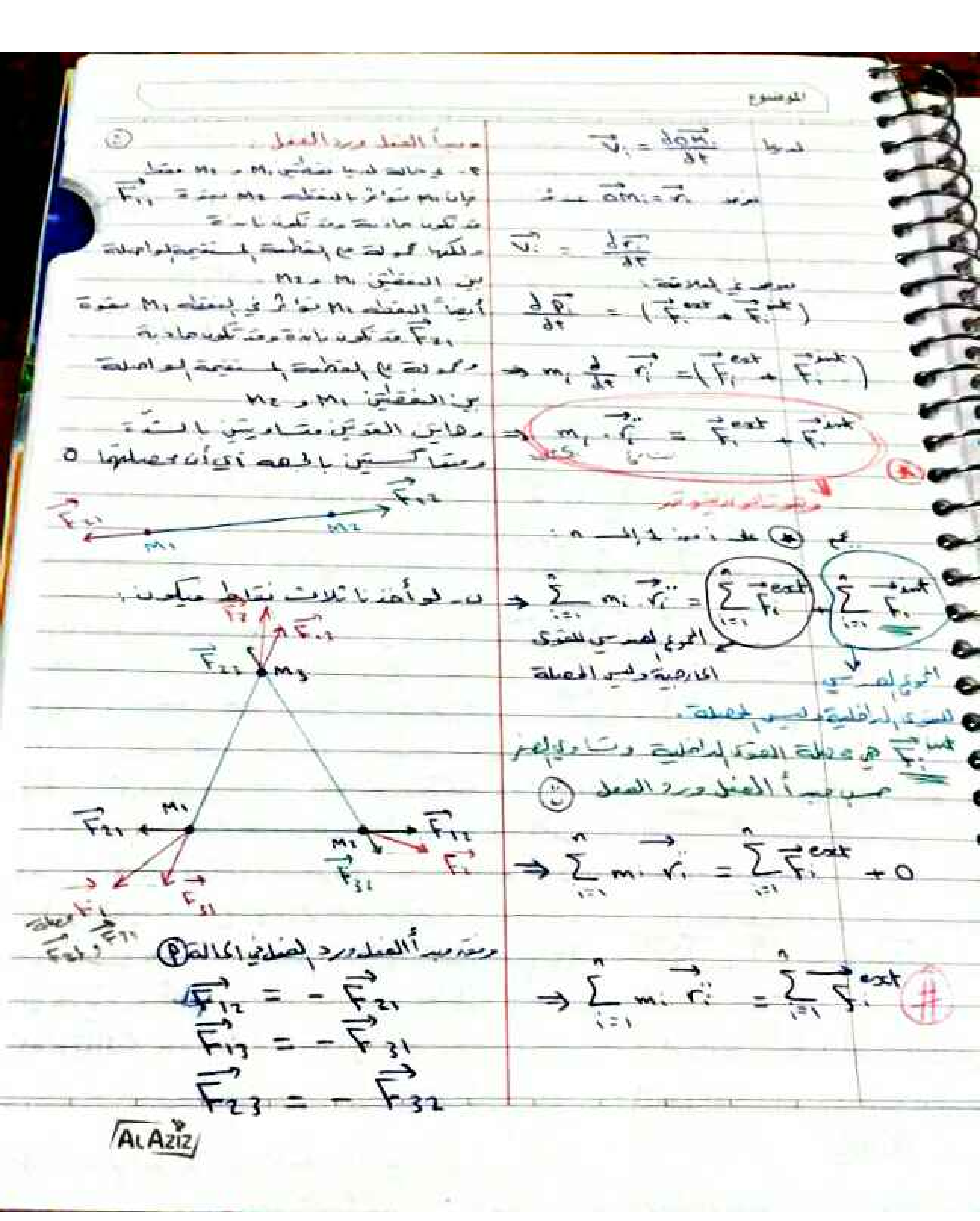
وبالتالي

$$\vec{P}_i = m_i \cdot \vec{V}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \left(\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}\right)$$

أي أن مشتق كمية الحركة = مجموع القوى المؤثرة على النقطة M_i

ALAZIZ



الموضوع

لدينا $\vec{v}_i = \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$

ونضع $\vec{OM}_i = \vec{r}_i$ عندئذ

$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

ومن العلاقة:

$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$

$\Rightarrow m_i \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}_i = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$

$\Rightarrow m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$ (*)

نجمع (*) على i من 1 إلى n:

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int}$

المجموع الشعاعي للقوى الخارجية وليس المحصلة

المجموع الشعاعي للقوى الداخلية وليس المحصلة.

$\vec{F}_i^{int}$ هي محصلة القوى الداخلية وتساوي الصفر حسب مبدأ الفعل ورد الفعل

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext}$ (#)

مبدأ الفعل ورد الفعل:

أ- في حالة لدينا نقطتين m_1 و m_2 متفاعلتين، m_1 تؤثر بالنقطة m_2 بقوة $\vec{F}_{12}$ قد تكون جاذبة وقد تكون نابذة

ولكنها منطبقة مع المستقيم الواصل بين النقطتين m_1 و m_2

أيضاً النقطة m_2 تؤثر في النقطة m_1 بقوة $\vec{F}_{21}$ قد تكون نابذة وقد تكون جاذبة

ومنطبقة مع المستقيم الواصل بين النقطتين m_1 و m_2

وهاتين القوتين متساويتين بالشدة ومتعاكستين بالجهة أي أن محصلتهما 0

ب- لو أخذنا ثلاث نقاط مختلفة:

وحسب مبدأ الفعل ورد الفعل في الحالة ب:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$

$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$

الموضوع

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \vec{e_\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

(إذا كان $\vec{e_\theta}$ و $\vec{e_r}$ ... ثابتة في ... XOY ...)

وبالتالي،

$$m\ddot{x}\,\vec{i} + m\ddot{y}\,\vec{j} = mg\,\vec{i} + (R_{1x} + R_{2x})\,\vec{i} + (R_{1y} + R_{2y})\,\vec{j}$$

يصعب أن ... هذه العلاقة ...

لذلك نسقط العلاقة

$$\vec{V} = V\,\vec{e_r} + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$= V\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$\vec{r}$ ...

$$\Rightarrow \vec{V} = 0 + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{V} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

لأن النقطة A ... دائرة

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \dot{\vec{V}} = r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$$

وبالتالي

$$mr\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = mg\,\vec{i} + R_1\vec{e_r} + R_2\vec{e_r}$$

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow mr\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta} + R_1\vec{e_r} + R_2\vec{e_r}$$

وبالتالي

$$-mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R_1 + R_2 \quad (1)$$

...

$$mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2)$$

والمعادلة (2) تفيد في معرفة ... حركة

R.AZIZ

الموضوع

ويكون $\vec{0} = \vec{V_i} \wedge m_i \vec{V_i}$ لأن الجداء الشعاعي لشعاعين متوازيين (مرتبطين خطيا) أي بمعنى أن منحاهما متساويان يساوي العدم

والجداء الشعاعي = طويلة الأول × طويلة الثاني × جيب الزاوية بينهما

وبالتالي $\frac{d}{dt}(\vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}) = \vec{r_i} \wedge \frac{d}{dt}(m_i \vec{v_i})$

نعوض في (*)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} \underset{O}{mom}\, \vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \wedge m_i \vec{v_i}) = \underset{O}{Mom}\, \vec{F_i}^{ext}$$

لدينا $\sum_{i=1} \underset{O}{mom} = \underset{O}{Mom}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{\sigma_o} = \underset{O}{Mom}\, \vec{F_i}^{ext}$$

وهو المطلوب إثباته ..

---

② - مبرهنة العزم الحركي من أجل مركز الثقل G (مركز العطالة) :

- إذا كانت نقطة المقارنة هي مركز الثقل :

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_G}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underset{G}{mom}\, \vec{F_i}^{ext}$$

البرهان:

- لنأخذ جملة مادية S نقاطها $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وكتلها $m_1, m_2, \ldots, m_n$

وشعاعات الموضع $\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \ldots, \vec{OA_n}$ وسرعها $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n}$

انطلاقا من النتيجة :

$$\frac{d\vec{\sigma_o}(S)}{dt} = \sum \vec{OA_i} \wedge \vec{F_i}^{ext}$$

لنفترض حالة $\vec{OA_i} = \vec{OG} + \vec{GA_i}$ وبالتالي من علاقة كونيغ

$$\Rightarrow \vec{\sigma_o} = (\sum m_i)\, \vec{V}(G) + \sum \vec{GA_i} \wedge m_i \vec{V}(A_i G)$$

$$= \vec{\sigma_o}(G) + \vec{\sigma_G}(S)$$

نستنتج:

المَوضوع

// إثباتات نظرية العزم الحركي:

① مشتق العزم الحركي بالنسبة لنقطة ثابتة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \vec{mom}_O\, \vec{F}_i^{ext}$$

البرهان: ننطلق من كمية الحركة للمجموعة S

- لتكن لدينا مجموعة مادية مكونة من عدة نقاط $S=\{A_1,A_2,\dots A_n\}$
وكتل هذه النقاط $\{m_1,m_2,\dots m_n\}$ وشعاعاتها $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots \vec{r}_n$
وسرعتها $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots \vec{v}_n$ وتؤثر عليها قوى خارجية $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\dots \vec{F}_n^{ext}$
والقوى الداخلية $\vec{F}_1^{int},\vec{F}_2^{int},\dots \vec{F}_n^{int}$
وبالتالي كمية الحركة للنقطة هو $m_i\vec{v}_i$
نشتق كمية الحركة

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

نضرب الطرفين شعاعياً بمتجه الموضع للنقطة ذات الدليل i فنجد:

$$\vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$$

$$\Rightarrow \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{int}$$

حيث $i=1,2,\dots n$ نجمع هذه المعادلات.

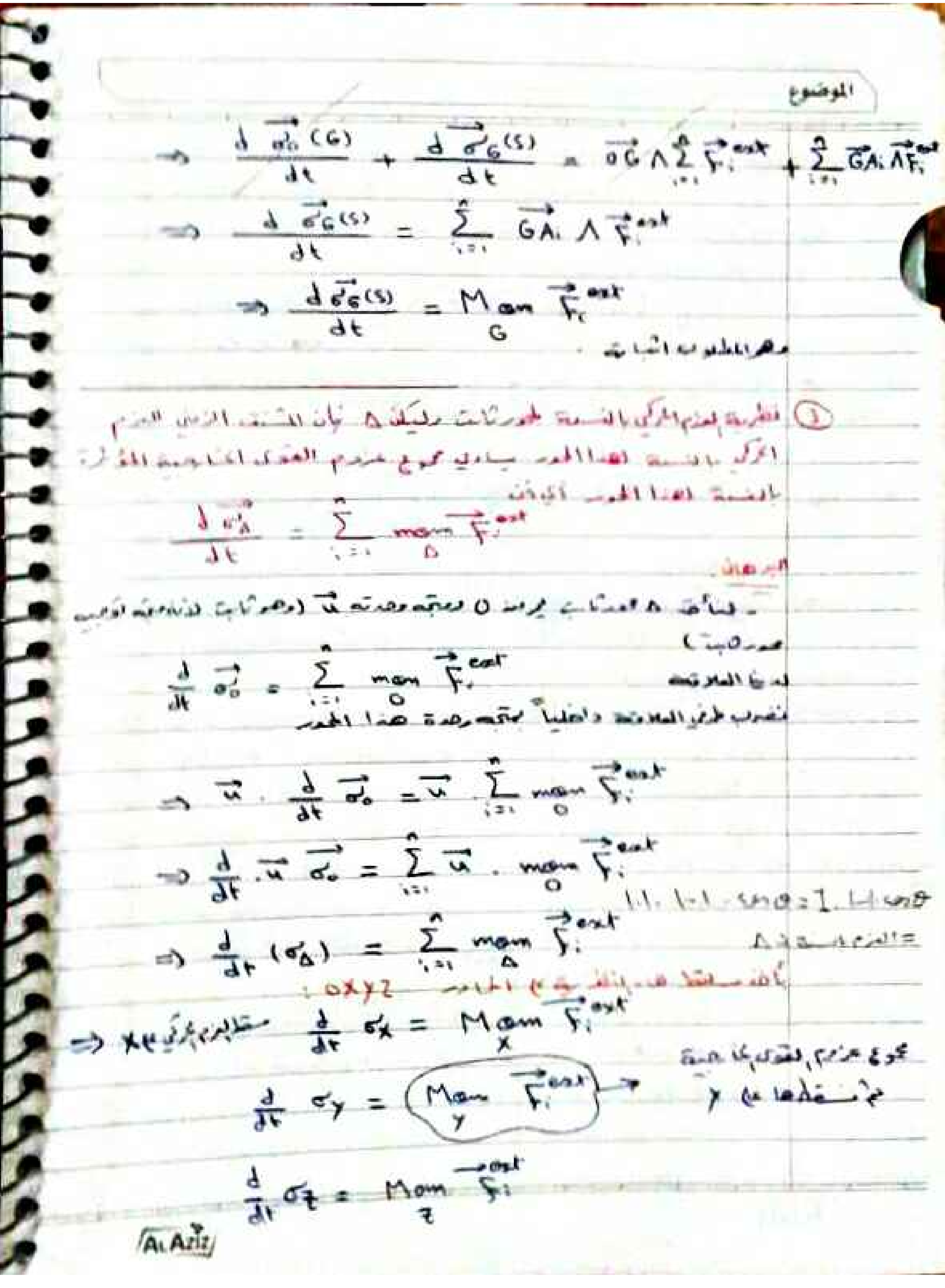
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{mom}_O\, \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{mom}_O\, \vec{F}_i^{int}$$

ومن كما أثبتنا أن $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} = 0$ فإنه بنفس الطريقة $\sum_{i=1}^{n} \vec{mom}_O\, \vec{F}_i^{int} = 0$
أما أعمال القوى الداخلية فهي بشكل عام لا تساوي الصفر
ومنه يصبح:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge (m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{mom}_O\, \vec{F}_i^{ext} + 0 \quad \text{—}(*)$$

لدينا

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i) = (\vec{v}_i \wedge m_i\vec{v}_i) + \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i$$
$$= 0 + \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)$$



الموضوع

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_O(G)}{dt} + \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \vec{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \underset{G}{\mathrm{Mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

وهو المطلوب اثباته .

---

① نظرية العزم الحركي بالنسبة لمحور ثابت متكيف Δ : إن المشتق الزمني للعزم الحركي بالنسبة لهذا المحور يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة بالنسبة لهذا المحور أي أن:

$$\frac{d\,\sigma_\Delta}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta}{\mathrm{mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

البرهان:

- لنأخذ Δ محور ثابت يمر من O ومتجه وحدته $\vec{u}$ (وهو ثابت لأن Δ محور ثابت)

لدينا العلاقة

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O = \sum_{i=1}^{n} \underset{O}{\mathrm{mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

نضرب طرفي العلاقة داخلياً بمتجه وحدة هذا المحور

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O = \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underset{O}{\mathrm{mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{u} \cdot \underset{O}{\mathrm{mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

$|\vec{u}|\,|\vec{a}|\cos\theta = 1 \cdot |\vec{a}|\cos\theta$ = المسقط على Δ

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\sigma_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta}{\mathrm{mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

بأخذ مسقط هذه العلاقة على محاور OXYZ :

$\Rightarrow$ مسقط العزم الحركي على X

$$\frac{d}{dt}\sigma_X = \underset{X}{\mathrm{Mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_Y = \underset{Y}{\mathrm{Mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

→ مجموع عزوم القوى الخارجية مسقطها على Y

$$\frac{d}{dt}\sigma_Z = \underset{Z}{\mathrm{Mom}}\, \vec{F}_i^{ext}$$

Al Aziz

الموضوع

$$= \sum \vec{F_1} + \sum \vec{F_2} + \sum \vec{F_3} \Rightarrow$$

$$= \vec{F_{21}} + \vec{F_{31}} + \vec{F_{32}} + \vec{F_{12}} + \vec{F_{13}} + \vec{F_{23}}$$

$$= (\vec{F_{12}} + \vec{F_{21}}) + (\vec{F_{31}} + \vec{F_{13}}) + (\vec{F_{23}} + \vec{F_{32}})$$

$$= (\vec{F_{12}} - \vec{F_{12}}) + (\vec{F_{31}} - \vec{F_{31}}) + (\vec{F_{23}} - \vec{F_{23}})$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

* تكاتيه مركبتان على الأغلب هما:

1- رد فعل ناظمي $\vec{R_n}$ (يعامد مماس السطح)

2- رد فعل مماسي $\vec{R_t}$ (محمول مع المستقيم المماس)

* وهذا الفعل المماسي والناظمي مشتركان بنقطة التماس..

$\vec{R_n}$: القيمة المطلقة لمركبة رد الفعل تساوي القيمة المطلقة للقوة الضاغطة.

أي أن شدة القوة الضاغطة يساوي شدة رد الفعل الناظمي وتعاكسه بالاتجاه

$\vec{R_t}$: ينشأ عن طبيعة السطح (مادته) وشكله ونسميه قوة احتكاك وهو نوعان:

1- احتكاك يؤدي إلى الانزلاق فقط أو انزلاق مع تدحرج، وشدة هذه القوة تتناسب طرداً مع شدة القوة الضاغطة مع السطح ومعامل التناسب نسميه معامل الاحتكاك وغالباً نرمزله f.

2- احتكاك يؤدي إلى تدحرج 2 بدون انزلاق ومنه نهائية مهملة ومنها نضيف إلى معادلات الحركة معادلة العزم.

ملاحظة: لو كانت المجموعة لمليئة عند ها قوى جر ردود أفعال - فقط نوجه قوى فعالة..

وبالتالي يمكننا كتابة القانون الأخير بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\ddot{r}_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\dot{r}_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \cdot \vec{\dot{r}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (m_i \cdot \vec{\dot{r}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P}(S) = \sum_{i=1}^{n} F_i^{ext}$$

وهي الصيغة الاشتقاقية لكمية الحركة المجموعة S.

وتكون الصيغة التفاضلية لها:

$$d\vec{P}(S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{ext} . dt$$

يسمى الدفع الجزئي وبمكاملته ينتج الدفع الكلي لهذه القوة.

شدة القوة الضاغطة: تأثير القطع المادية أو الجسم مع السطح

الموضوع

أي إذا كان لدينا جسمان على نفس الأفق وكل منهما مربوط بنابض وربطنا خيط بين الجسمين وعلقنا منه ثقل.

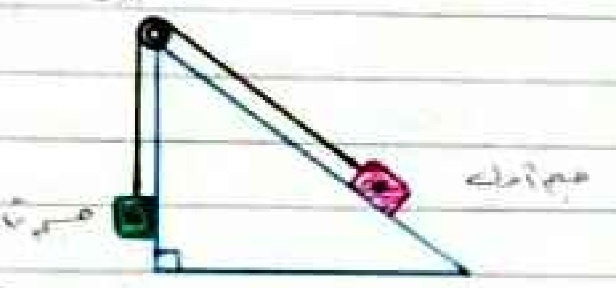
- شكل المعادلات التفاضلية لهذه المجموعة مستبعداً كمية الحركة ، علماً أن مسار الجسمين الأول والثاني أملس. والاحتكاك بكل المجموعة معدوم ثم أوجد قوى ردود الفعل بدون إدخال الخيط ؟

- القوى المؤثرة هي الأثقال وردود فعل P_1 , P_2 وقوة مرونة النابض (صلابة النابض)

- قوى ردود فعل P_1 و P_2 ناظمية فقط لأن الجسمين على نفس الأفق.

وظيفة:

أخذنا مقطع منشور قائم وعلقنا عليه جسمين بواسطة بكرة وخيط كما في الشكل التالي :



علماً أن البكرة مهملة الوزن ونصف القطر ادرس حركة هذه الجملة (جسم أول - بكرة - جسم ثاني)

انتهت المحاضرة الرابعة